

# 10. Σύνθεση ταλαντώσεων.

10.4.4 (1, 2, 1, 1)

10.4.5 (2, 2, 1, 2)

10.4.6 (2, 1, 1, 1)

10.4.7 (1, 1, 1, 1)

10.4.8 (1, 2, 2, 2)

10.4.9 (2, 2, 2, 1)

10.4.10 (2, 2, 2, 1)

10.4.11  $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$  ή  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\varphi}$

$A_{\min} = |A_1 - A_2| = 0,1\text{m}$  όταν  $\cos\varphi = -1$  ή  $\varphi = \pi$  }  $\Rightarrow$  γενικά  $0,1 \leq A \leq 0,5\text{m}$

$A_{\max} = A_1 + A_2 = 0,5\text{m}$  όταν  $\cos\varphi = 1$  ή  $\varphi = 0$

Άρα αποφαίνεται οι περιπτώσεις (α) και (β). Η γόνυ πιθανή έστω εξίσωση είναι η δ.,  $x = 0,4\cos(10\pi t + \theta_2)$ .

10.4.12 Το πλάτος της σύνθετης ταλάντωσης στη γενική περίπτωση είναι  $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ . Η περίωδος  $A = A_1 - A_2$  ισχύει μόνο για ταλαντώσεις γύρω ίδιας διόδου που έχουν διαφορετική φάση π. Η Ανδριάνα έχει συνθετική άποψη διότι ενώ έχουν διαφορετική φάση η αλλαγή δεν είναι σε ίσους όρους οπότε πρόκειται για ταλαντώσεις γύρω ίδιας διόδου.

10.4.13.  $E = E_1 + E_2$  μόνο αν  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (βλ. 10.2)

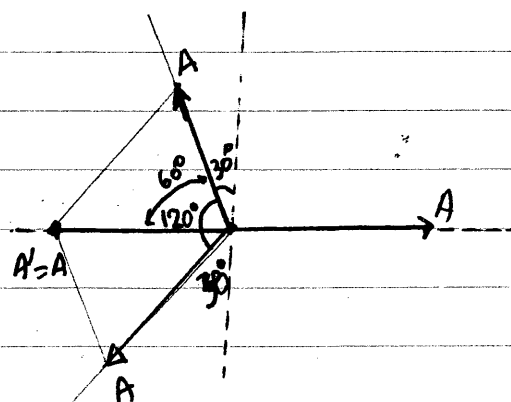
10.4.14 Η σύνθετη ταλάντωση θα έχει εξίσωση  $x = x_1 + x_2 + x_3$  ή  $x = A\sin(\omega t) + A\sin(\omega t + \frac{\pi}{3}) + A\sin(\omega t + \frac{2\pi}{3}) = 0 = 0$

000 και γέ στρεφόμενη διανύσματα

Προβείτε το σχήμα

$A' = \sqrt{A^2 + A^2 + 2AA\cos 120} = A$

$\vec{A}' + \vec{A} = 0$



10.4.15 α) Οι αμplitudes της του

πλάτους της σύνθετης ταλάντωσης

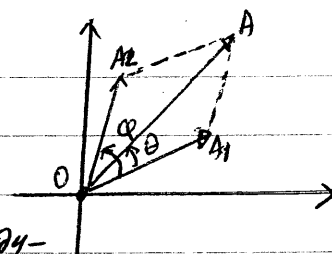
είναι  $|A_1 - A_2| \leq A \leq A_1 + A_2$  (βλ και 10.4.11). Η απομάκρυνση αν ταλαντώσει στη σύνθετη ταλάντωση είναι  $A_2 \leq x \leq A_2$  (13)

$x \leq A_1 + A_2$ .  $\therefore$   $x_{\max} = A_1 + A_2$ , Άρα η απομάκρυνση

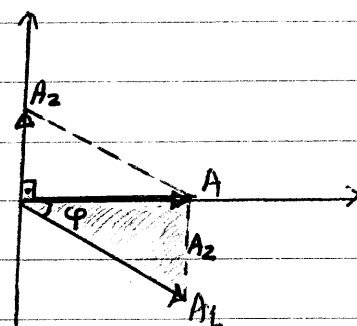
$x = A_1 + A_2\sqrt{2}$  δεν είναι δυνατόν αφού έχει μεγαλύτερο από τη μέγιστη δυνατή τιμή  $x_{\max} = A_1 + A_2$

β) Για να είναι  $\theta = \frac{\pi}{2}$  πρέπει  
στο παραλληλόγραφο γωγωνία  
η διαγώνιος  $\vec{A}$  να είναι διχοτόμος.

Για να συμβαίνει αυτό πρέπει το παραλλη-  
λόγραφο να είναι ρόμβος, άρα  $A_1 = A_2$



10.4.16 Από ορθογώνιο τριγωνομετρικό τρίγωνο  
φαίνεται ότι  $A = A_1 \sin \varphi$ ,  $A_2 = A_1 \cos \varphi$  και  
 $A_1 = \sqrt{A^2 + A_2^2}$  ή  $A = \sqrt{A_1^2 - A_2^2}$ .  
Σωστό, οι προτάσεις (α) και (δ)



10.4.17 Α)  $x_1 = 0,10 \mu\text{m}(100\pi t)$ ,  $x_2 = 0,20 \mu\text{m}(100\pi t)$ ,  $x = x_1 + x_2$  ή  $x = 0,30 \mu\text{m}(100\pi t)$  (SI)

Β)  $A = 0,30 \mu\text{m}$ ,  $\omega = 100\pi$  ή  $f = 50 \text{ Hz}$

Γ)  $v = 30\pi \text{ cm}(100\pi t)$  (SI) Δ)  $x = 0,30 \mu\text{m}(100\pi \frac{1}{600}) = 0,15 \mu\text{m}$  και

$v = 30\pi \text{ cm}(100\pi \frac{1}{600})$  ή  $v = 15\pi \sqrt{3} \text{ m/s}$  Ε)  $v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$  ή  $v = \pm 18\pi \text{ m/s}$

ΣΤ α)  $\Sigma F = -Dx = -m\omega^2 x$  ή  $\Sigma F = -0,2(100\pi)^2 0,18$  ή  $\Sigma F = -3600 \text{ N}$

β)  $\Sigma F = -Dx$  ή  $\Sigma F = -200000x$  ή  $-0,3 \leq x \leq 0,3$

10.4.18 Α)  $m = 0,5 \text{ kg}$ ,  $x_1 = 0,10 \mu\text{m}(100\pi t)$  και  $x_2 = 0,18 \mu\text{m}(100\pi t + \pi)$

$x = x_1 + x_2 \Rightarrow x = 0,08 \mu\text{m}(100\pi t + \pi)$  Β)  $A = 0,08 \mu\text{m}$  και  $f = 50 \text{ Hz}$

Γ)  $v = 8\pi \text{ cm}(100\pi t + \pi)$  Δ)  $x = -0,04 \mu\text{m}$ ,  $v = -4\pi \sqrt{3} \text{ m/s}$

Ε)  $v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$  ή  $v = \pm 100\pi \sqrt{0,08^2 - 0,04^2}$  ή  $v = \pm 4,8\pi \text{ m/s}$ ,  $a = -\omega^2 x = -6400 \text{ m/s}^2$

ΣΤ)  $\Sigma F = -m\omega^2 x = -2400 \text{ N}$

10.4.19. Α)  $m = 0,1 \text{ kg}$ ,  $x_1 = 0,10 \mu\text{m}(100\pi t)$ ,  $x_2 = 0,10 \mu\text{m}(100\pi t + \frac{\pi}{2})$

Από το σχήμα φαίνεται  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$  ή  $A = 0,10\sqrt{2} \mu\text{m}$

και  $\theta = \frac{\pi}{4}$  (... το σχήμα είναι τεταγμένο)

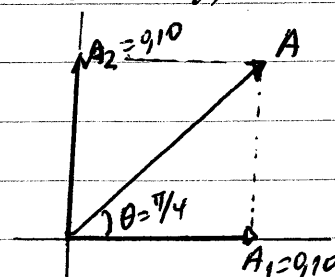
$x = 0,10\sqrt{2} \mu\text{m}(100\pi t + \frac{\pi}{4})$  (SI) και

$v = 10\pi\sqrt{2} \text{ cm}(100\pi t + \frac{\pi}{4})$  (SI)

Β)  $x = -0,10 \mu\text{m}$  και  $v = -10\pi \text{ m/s} = -31,4 \text{ m/s}$

Γ)  $D = m\omega^2 = 10000 \text{ N/m}$ ,  $E = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 100 \text{ J}$

$U = \frac{1}{2} D x^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^4 (0,10)^2$  ή  $U = 50 \text{ J}$  και  $K = E - U$  ή  $K = 50 \text{ J}$



$$10.4.20. m=2\text{kg} \quad x_1=0,06\text{m}(100\pi t) \quad \text{και} \quad x_2=0,08\text{m}(100\pi t+\frac{\pi}{2})$$

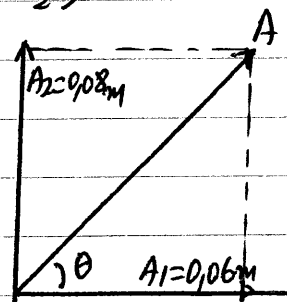
$$A) \quad A=\sqrt{A_1^2+A_2^2} \quad \eta' \quad A=\sqrt{0,06^2+0,08^2} \quad \eta' \quad A=0,10\text{m}$$

$$\varepsilon\varphi\theta=\frac{A_2}{A_1}=\frac{4}{3}, \quad v_0=\omega A=10\pi\text{m/s}$$

$$a_0=\omega^2 A \quad \eta' \quad a_0=10000\text{m/s}^2 \quad \dots \text{d.p.e.}$$

$$x=0,10\text{m}(100\pi t+\theta), \quad v=10\pi\text{m/s}(100\pi t+\theta)$$

$$a=-10^4\text{m/s}^2(100\pi t+\theta) \quad (\text{S.I.}).$$



$$B) \quad x=0,10\text{m}(100\pi t+\theta)=0,10\text{m}(100\pi\frac{1}{400}t+\theta) \quad \eta'$$

$$x=0,10\text{m}(\frac{\pi}{4}+\theta)=0,10(\text{m}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 6\omega\theta + 6\omega\frac{\pi}{4}\text{m}\cdot\theta) \quad (1)$$

Από το σχήμα ε' προκύπτει

$$6\omega\theta=\frac{0,06}{0,10}=0,6 \quad \text{και} \quad \text{από} \quad \theta=\frac{0,08-0,8}{0,10} \xrightarrow{(1)} x=0,10(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0,8+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0,6)$$

$\eta' \quad x=0,07\sqrt{2}\text{m} \quad \dots$  και πιο απλά γέγινε αρχικά αν εφευραγεί, των κεντρικών

$$x_1=0,06\text{m}(100\pi\frac{1}{400})=0,03\sqrt{2}\text{m}$$

$$x_2=0,08\text{m}(100\pi\frac{1}{400}+\frac{\pi}{2})=0,04\sqrt{2}\text{m} \quad \left. \vphantom{x_1} \right\} \Rightarrow x=x_1+x_2 \quad \eta' \quad x=0,07\sqrt{2}\text{m}$$

$$\Gamma) \quad v=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}=\pm 100\pi\sqrt{0,10^2-0,06^2} \quad \eta' \quad v=\pm 8\pi\text{m/s}$$

$$D) \quad D=m\omega^2=2\cdot 10^5\text{N/m}, \quad E_{\text{el}}=\frac{1}{2}DA^2=100\text{J}, \quad U=\frac{1}{2}Dx^2=250\text{J}$$

$$\text{και} \quad K=E_{\text{el}}-U \quad \eta' \quad K=750\text{J}$$

$$10.4.21. \quad m=0,02\text{kg} \quad x_1=0,1\text{m}(100\pi t-\frac{\pi}{6}) \quad (\text{S.I.}) \quad \text{και} \quad x_2=0,1\text{m}(100\pi t+\frac{\pi}{2}) \quad (\text{S.I.})$$

$$\Delta\varphi=(100\pi t+\frac{\pi}{2})-(100\pi t-\frac{\pi}{6})=2\pi/3 \quad \eta' \quad \Delta\varphi=2\pi/3$$

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\varphi} \Rightarrow A=0,10\text{m}$$

Το παραλληλόγραμμο είναι ορθόγων άρα  $\theta=\frac{\pi}{3}\text{rad}$

$$A) \quad x=0,10\text{m}(100\pi t-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}) \quad \eta'$$

$$x=0,10\text{m}(100\pi t+\frac{\pi}{6}) \quad (\text{S.I.})$$

$$B) \quad x=0,10\text{m}(100\pi\frac{1}{200}+\frac{\pi}{6}) \quad \eta' \quad x=0,106\omega\frac{\pi}{6} \quad \eta'$$

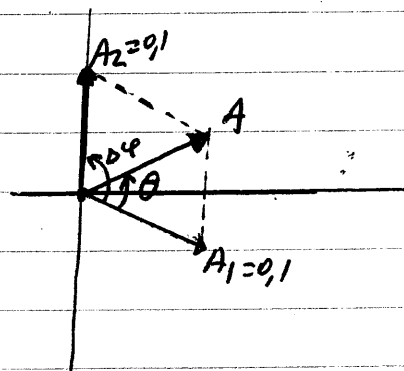
$$x=0,10\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \eta' \quad x=0,05\sqrt{3}\text{m}, \quad D=m\omega^2=2\cdot 10^3\text{N/m}$$

$$E_{\text{el}}=\frac{1}{2}DA^2=10\text{J}, \quad U=\frac{1}{2}Dx^2=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 10^3/(0,05\sqrt{3})^2 \quad \eta' \quad U=7,5\text{J}$$

$$\text{και} \quad K=E_{\text{el}}-U \quad \eta' \quad K=2,5\text{J}$$

$$\Gamma) \quad \Sigma F=-Dx \quad \eta' \quad \pm 120=-2\cdot 10^3x \quad \eta' \quad x=\pm 0,06\text{m}$$

$$d) \quad v=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}=\pm 8\pi\text{m/s} \quad \text{και} \quad \frac{dK}{dt}=\Sigma F\cdot v=(\pm 120)(\pm 8\pi)=\pm 960\pi\text{J/s}$$



$$dV/dt = -dE/dt \text{ и } dV/dt = \mp 9607 \frac{J}{s}$$

$$10.4.22. A) \Delta\varphi = \frac{\pi}{3} \text{ и } A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{и } A = 15 \text{ см} \text{ и } \theta = \frac{\Delta\varphi}{2} \text{ и } \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{а) } x = A \sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) \text{ и}$$

$$x = 0,15 \sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) \text{ (СИ)}$$

$$B) D = m\omega^2 = 0,01 \cdot (10\pi)^2 = 10 \text{ Н/м}, \text{ и } F = -10x$$

$$Г) E_{\text{п}} = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (0,15)^2 = 1,125 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}$$

$$V = \frac{1}{2} D x^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (0,10)^2 = 5,00 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}$$

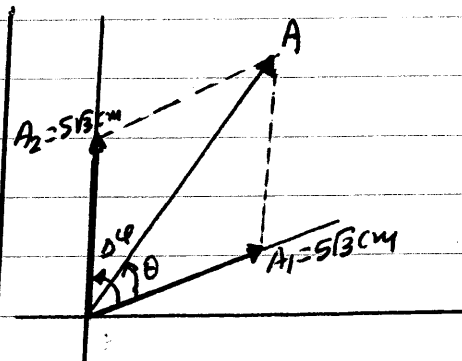
$$\left. \begin{array}{l} E_{\text{п}} = 1,125 \cdot 10^{-2} \text{ Дж} \\ V = 5,00 \cdot 10^{-2} \text{ Дж} \end{array} \right\} K = 6,25 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}$$

$$Д) \text{ а) } v_0 = \omega A = 10\pi \cdot 0,15 = 1,5\pi \text{ м/с}, \text{ и } v_0 = 1,5\pi \text{ м/с}$$

$$\text{б) } v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} \text{ и } v = \pm 1,2\pi \text{ м/с}$$

$$Е) a = -\omega^2 x \text{ и } a = -1000x \text{ и } \pm 120 = 1000x \text{ и } x = \pm 0,12 \text{ м}$$

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} \text{ и } v = \pm 0,9\pi \text{ м/с}$$



$$10.4.23 \quad T = 0,1 \text{ с} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 20\pi \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

$$A) x_1 = 10 \sin(20\pi t) \text{ (x в см)} \text{ и } x_2 = 5 \sin(20\pi t + \pi) \text{ (x в см)}$$

$$B) x = x_1 + x_2 = 10 \sin(20\pi t) + 5 \sin(20\pi t + \pi) \text{ и } x = 5 \sin(20\pi t) \text{ и}$$

$$x = 5 \cdot 10^{-2} \sin(20\pi t) \text{ (СИ)} \text{ и } v = \pi \cdot 6 \sin(20\pi t) \text{ (СИ)}$$

$$Г) D = m\omega^2 = 1 \cdot (20\pi)^2 = 400\pi^2 = 4 \cdot 10^3 \text{ Н/м}, E_{\text{п}} = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2 \text{ и}$$

$$\text{и } E_{\text{п}} = 5 \text{ Дж}, V = \frac{1}{2} D x^2 \text{ и } V = 2 \cdot 10^3 x \text{ а) } K = 5 \cdot 2 \cdot 10^3 x$$

$$10.4.24. \quad T = 0,2 \text{ с} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,2} \text{ и } \omega = 10\pi \frac{\text{рад}}{\text{с}}, m = 0,5 \text{ кг}$$

$$A) x_1 = 8 \sin(10\pi t) \text{ и } x_2 = 6 \sin(10\pi t + \frac{\pi}{2}) \text{ (x в см)}$$

$$B) A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 10 \text{ см} \text{ и } A = 0,1 \text{ м}$$

$$\sin\theta = \frac{A_2}{A} = \frac{6}{10} = 0,6 \text{ и } \cos\theta = \frac{A_1}{A} = \frac{8}{10} = 0,8$$

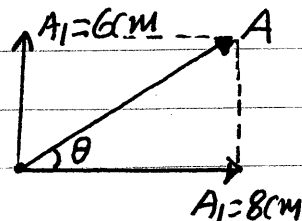
$$x = 10 \sin(10\pi t + \theta) \text{ (x в см)}$$

$$Г) D = m\omega^2 = 0,5 \cdot (10\pi)^2 = 500\pi^2 \text{ Н/м}, F = -500x \text{ (СИ)}$$

$$Д) \text{ Энергия колебаний } E_{\text{п}} \text{ и } E_{\text{к}}$$

$$x_1 = 8 \sin(10\pi \frac{1}{40}) = 4\sqrt{2} \text{ см}, x_2 = 6 \sin(10\pi \frac{1}{40} + \frac{\pi}{2}) = 3\sqrt{2} \text{ см}$$

$$\text{а) } x = x_1 + x_2 \text{ и } x = 7\sqrt{2} \text{ см}$$



10.4.25. A)  $x = x_1 + x_2 + x_3 = 10 \mu\text{m}(100t) + 10 \mu\text{m}(100t + \frac{\pi}{2}) + 10 \mu\text{m}(100t + \pi)$   $\eta' x = 10 \mu\text{m}(100t) + 10 \mu\text{m}(100t + \frac{\pi}{2}) - 10 \mu\text{m}(100t)$   
 B)  $\alpha) E = \frac{1}{2} D A^2 = 2,5 \text{ J}$   $\beta) \frac{K}{E} = \frac{E - v}{E} = 1 - \frac{v}{E} = 1 - \left(\frac{K}{A}\right)^2 = 0,64$   $\pi 060670' 64\%$   
 $\gamma) x = 0,1 \text{ m}, v = 0$

10.4.26.  $T = 0,2 \text{ s} \Rightarrow \omega = 10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}, D = m\omega^2 = 1000 \text{ N/m}$

A)  $x_1 = 2 \text{ cm}(100t), x_2 = 4 \text{ cm}(100t + \frac{\pi}{2}), x_3 = 5 \text{ cm}(100t + \pi)$

B)  $A = \sqrt{A_2^2 + (A_3 - A_1)^2} \Rightarrow A = 5 \text{ cm}$

$\eta \mu \theta = \frac{3}{5} = 0,6 \quad \kappa' \sigma \omega \theta = \frac{4}{5} = 0,8$

$x = A \mu\text{m}(100t + \eta/2 + \theta) \eta'$

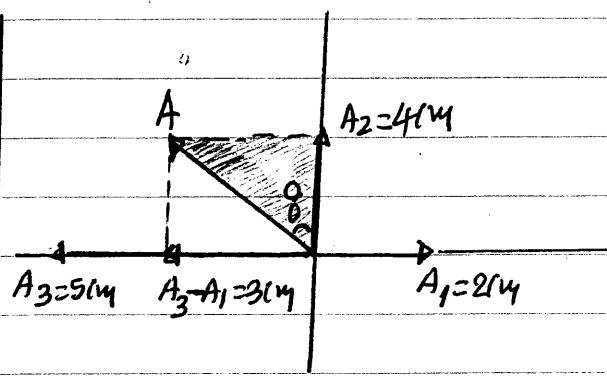
$x = 5 \text{ cm}(100t + \frac{\pi}{2} + \theta) (x: \text{cm})$

$\eta' x = 56 \text{ cm}(100t + \theta) (x: \text{cm})$

Γ)  $\Gamma \alpha t = 1 \text{ s}, x = 56 \text{ cm}(100t + \theta) \eta'$

$x = 56 \omega \theta \Rightarrow x = 4 \text{ cm}$

Δ)  $E = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} 1000 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2 = 1,25 \text{ J}, U = \frac{1}{2} D x^2 = 0,8 \text{ J}$   $\kappa \alpha \iota' K = 0,45 \text{ J}$



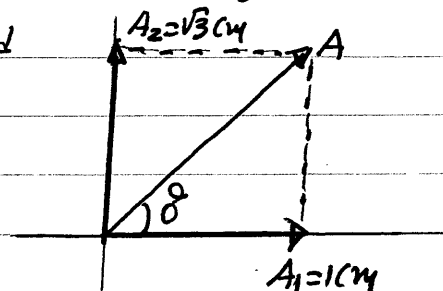
10.4.27.  $x_1 = 1 \mu\text{m}(10t), x_2 = \sqrt{3} \text{ cm}(10t) \eta' x_2 = \sqrt{2} \text{ cm}(10t + \frac{\pi}{4})$

$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \eta' A = 2 \text{ cm}, \eta \mu \theta = \frac{A_2}{A} = \frac{\sqrt{3}}{2} \eta' \theta = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$

A)  $x = 2 \cdot 10^{-2} \mu\text{m}(10t + \frac{\pi}{3}) (S.I.)$

B)  $x = 2 \cdot 10^{-2} \mu\text{m}(10 \frac{\pi}{60} + \frac{\pi}{3}) \eta' x = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 2 \text{ cm}$

Γ)  $A, \Sigma, \eta, \Lambda$



10.4.28 A)  $x_1 = A \mu\text{m}(100t), x_2 = A \mu\text{m}(100t + \varphi), x_3 = 10\sqrt{3} \mu\text{m}(100t + \frac{\pi}{6})$

ΑΠΟ ΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ  $\kappa \alpha \iota' \tau \omega \text{ Gx} \eta \tau \alpha (\sigma \sigma \rho \delta \epsilon \nu \sigma)$

$\sigma \rho \alpha \nu \epsilon \tau \omega \sigma \epsilon \rho \delta \tau \iota \theta = \frac{\pi}{6} \kappa \alpha \iota' \theta = \frac{\varphi}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$

$A'^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \varphi \eta' A'^2 = A^2 + A^2 + 2A^2 \frac{1}{2}$

$\eta' A' = A\sqrt{3} \eta' 10\sqrt{3} = A\sqrt{3} \eta' A = 0,1 \text{ m}$

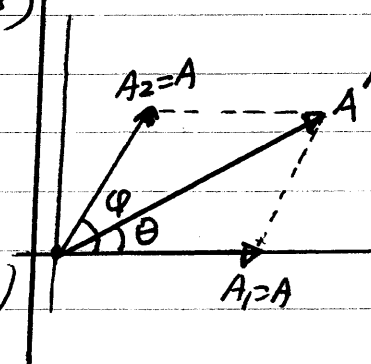
$T = \frac{2\pi}{100} \eta' T = 0,2 \text{ s}$

B)  $x_1 = 0,1 \mu\text{m}(100t) \kappa \alpha \iota' x_2 = 0,1 \mu\text{m}(100t + \frac{\pi}{3})$

Γ)  $v_0 = \omega A' = 100 \cdot 0,1 \Rightarrow v_0 = \pi = 3,14 \text{ m/s}$

Δ)  $D = m\omega^2 = 1000 \text{ N/m}, E_{\sigma 1} = \frac{1}{2} D A'^2 = 5 \text{ J}, K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2 = 2 \text{ J}$

$U = E_{\sigma 1} - K \eta' U = 3 \text{ J}$



$$10.4.29 \quad T=2\pi \text{ s} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad D = m\omega^2 \approx 10 \text{ N/m}$$

$$A) i. (8.10.2) \quad E = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1 E_2} \cos \varphi \quad \text{η} \quad 5 = 1,8 + 3,2 + 2\sqrt{1,8 \cdot 3,2} \cos \varphi \quad \text{η} \quad \cos \varphi = 0$$

$$\text{η} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$ii \quad E_1 = \frac{1}{2} D A_1^2 \quad \text{η} \quad A_1 = \sqrt{2E_1/D} = 0,6 \text{ m}, \quad E_2 = \frac{1}{2} D A_2^2 \quad \text{η} \quad A_2 = \sqrt{2E_2/D} = 0,8 \text{ m}$$

$$x_1 = 0,6 \sin(\pi t) \quad \text{η} \quad x_2 = 0,8 \sin(\pi t + \pi/2)$$

$$\text{η} \quad x = 1 \sin(\pi t + \theta)$$

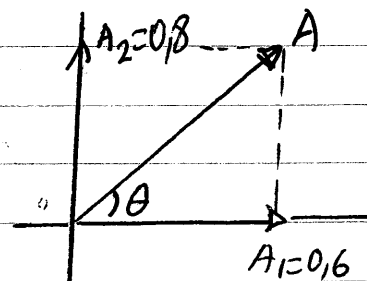
$$\text{η} \quad \pi t + \theta = 0,8$$

$$B) (8.10.2) \quad E = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1 E_2} \cos \varphi \quad \text{η}$$

$$E = 1,8 + 3,2 + 2\sqrt{1,8 \cdot 3,2} \cdot (-1) \quad \text{η} \quad E = 0,2 \text{ J}$$

$$Γ) D = m\omega^2 \quad \text{η} \quad \delta \text{ για } \delta \text{ ο } \lambda \text{ και } \tau \text{ και } \tau \text{ και } \tau \text{ και } \tau$$

$$\Sigma \omega \delta \tau \text{ η } \pi \rho \delta \tau \alpha \delta \gamma \text{ (i.v.)}$$



$$10.4.30 \quad A) E = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1 E_2} \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = -1/2 \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$$B) D = m\omega^2 \approx 10 \text{ N/m}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \text{ rad/s}, \quad E_1 = \frac{1}{2} D A_1^2 \Rightarrow A_1 = \sqrt{2E_1/D} = 0,5 \text{ m}$$

$$E_2 = \frac{1}{2} D A_2^2 \Rightarrow A_2 = 0,8 \text{ m}, \quad E = \frac{1}{2} D A^2 \Rightarrow A = 0,7 \text{ m}$$

$$x_1 = 0,5 \sin(\pi t), \quad x_2 = 0,8 \sin(\pi t - \frac{2\pi}{3}), \quad x = 0,7 \sin(\pi t + \theta)$$

$$Γ) 1. \quad U = 0,8 \text{ J} \quad \left. \begin{array}{l} \text{η} \quad \delta \text{ ιδία } U = \frac{1}{2} D x_1^2, \quad D = \delta \text{ ιδία } = m\omega^2 \\ 2. \quad U = 0,8 \text{ J} \end{array} \right\} \quad x_1 = 0,5 \text{ m}$$

$$D) \text{ Η συνολική ενέργεια στη θέση } x_2 \text{ τόσο για τη συνθήκη} \\ \text{τα αρχικά όσο και για την ενδιάμεση είναι } U = E - K \Rightarrow \\ U = 2,45 - 1,30 \quad \text{η} \quad U = 1,15 \text{ J}$$

$$1^{\text{η}} \text{ τα αρχικά } : K = E - U = 1,25 - 1,15 = 0,10 \text{ J} \quad \text{η} \quad K = 0,10 \text{ J}$$

$$2^{\text{η}} \text{ τα ενδιάμεσα } : K = E - U = 3,20 - 1,15 = 2,05 \text{ J} \quad \text{η} \quad K = 2,05 \text{ J}$$

$$10.4.31. \quad \omega = 2\pi/T = 10\pi \text{ rad/s}, \quad \Delta \varphi = \omega \Delta t = 10\pi \cdot 0,05 \text{ η } \Delta \varphi = \pi/2 \text{ rad}$$

$$A) x_1 = \sqrt{3} \sin(10\pi t), \quad x_2 = 1 \sin(10\pi t + \frac{\pi}{2}) \quad (x \text{ σε cm})$$

$$B) A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad \text{η} \quad A = 2 \text{ cm}, \quad \pi \theta = \frac{A_2}{A} = \frac{1}{2} \quad \text{η} \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

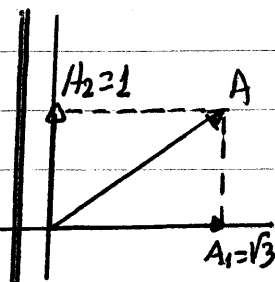
$$x = 2 \sin(10\pi t + \pi/6) \quad (x \text{ σε cm})$$

$$Γ) x = 2 \sin(10\pi \frac{1}{30} + \frac{\pi}{6}) = 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2 \text{ cm} \quad \text{η} \quad x = 2 \text{ cm}, \quad v = 0$$

$$Δ) x_1 = -x_2 \quad \text{η} \quad \sqrt{3} \sin(10\pi t) = -1 \sin(10\pi t) \quad \text{η}$$

$$\sqrt{3} [\sin(10\pi t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(10\pi t)] = 0 \quad \text{η} \quad \sqrt{3} [\sin(10\pi t) + \frac{\pi/6}{\sin \pi/6} \sin(10\pi t)] = 0 \quad \text{η}$$

$$\text{η} \quad 2 \sin(10\pi t + \frac{\pi}{6}) = 0 \quad \text{η} \quad 10\pi t + \frac{\pi}{6} = k\pi \quad \dots \quad t = \frac{5}{60} \text{ s}$$



- 10.5.1 A)  $x_1 = 10\mu\text{t}(500\pi t)$ ,  $x_2 = 10\mu\text{t}(502\pi t)$ ,  $f_1 = 250\text{Hz}$ ,  $f_2 = 251\text{Hz}$   
 B)  $x = x_1 + x_2 \rightarrow x = 206\mu\text{t}(\pi t)\mu\text{t}(501\pi t)$  ( $x: \text{cm}$ ,  $t: \text{s}$ )  
 Γ) α)  $A = |206\mu\text{t}(\pi t)| \sqrt{\text{cm}}$  β)  $\bar{\omega} = 501\pi$  η  $\bar{f} = 250,5\text{Hz}$ , ...  $\bar{f} = \frac{f_1 + f_2}{2}$   
 Δ) α)  $A_{\text{max}} = 20\mu\text{m}$  β)  $f_g = |f_1 - f_2| = 1\text{Hz}$ ,  $T_g = 1/f_g$  η  $T_g = 1\text{s}$   
 δ)  $f_g = \frac{N_g}{t}$  η  $N_g = f_g t$  η  $N_g = 104$  η  $N_g = 4$  διακροήματα, δηλ 4 κέρματα.

- 10.5. A)  $\bar{f} = \frac{f_1 + f_2}{2} = 401\text{Hz}$ ,  $T = \frac{1}{\bar{f}} = \frac{1}{401}\text{s}$ . ήχος περιοδικός  
 B)  $f_g = |f_1 - f_2| = 2\text{Hz}$ , περίοδος διακροήματος  $T_g = 1/f_g$  η  $T_g = 0,5\text{s}$   
 Γ)  $N_g = f_g \cdot t = 20$  διακροήματα, δηλ 20 κέρματα ήχου

- 10.5.3 α)  $f_g = \frac{N_g}{t} = \frac{20}{10}$  η  $f_g = 2\text{Hz} \rightarrow T_g = 1/f_g$  η  $T_g = 0,5\text{s}$   
 β)  $f_g = |f_1 - f_2|$  αν'όπου:  $f_g = f_1 - f_2$  η  $2 = 500 - f_2$  η  $f_2 = 498\text{Hz}$   
 η  $f_g = f_2 - f_1$  η  $2 = f_2 - 500$  η  $f_2 = 502\text{Hz}$

- 10.5.4 A)  $x_1 = 0,1\mu\text{t}(400\pi t)$  και  $x_2 = 0,1\mu\text{t}(398\pi t)$  (S.I.)  
 B)  $x = 0,26\mu\text{t}(2\pi t)\mu\text{t}(400\pi t)$  (S.I.)  
 Γ)  $\bar{\omega} = 400\pi = 2\pi\bar{f}$  η  $\bar{f} = 200\text{Hz}$  ...  $\bar{f} = \frac{f_1 + f_2}{2}$   
 Δ) α)  $A_{\text{max}} = 0,2\text{m}$  β)  $f_g = |f_1 - f_2| = 2\text{Hz}$ ,  $\Delta t = T_{\text{max}} = 1/f_g = 0,5\text{s}$   
 δ) Διακροήματα δ) περίοδος διακροήματος  
 E)  $\bar{f} = \frac{N}{\Delta t}$  η  $N = \bar{f} \cdot \Delta t \Rightarrow N = 200 \cdot 0,5$  η  $N = 100$  τεταγμένα  
 Στ)  $v_{\text{max}} = \omega A_{\text{max}} = 2\pi\bar{f} \cdot A_{\text{max}} = 400\pi \cdot 0,2 = 80\pi \text{ m/s}$

- 10.5.5. A)  $A = 2 \cdot 10^{-3}\text{m}$ ,  $\bar{f} = 250\text{Hz}$ ,  $f_g = 2\text{Hz}$  (επιπλέον διακροήματα)  
 $\rightarrow T_g = 1/f_g$  η  $T_g = 0,5\text{s}$   
 B)  $f_g = |f_1 - f_2| = 2\text{Hz}$  (1) και  $\bar{f} = \frac{f_1 + f_2}{2} = 250$  η  $f_1 + f_2 = 500\text{Hz}$  (2)  
 Από (1), (2)  $f_1 = 251\text{Hz}$  και  $f_2 = 249\text{Hz}$  (και αν αντιστρέψουμε)  
 Γ)  $x_1 = 2 \cdot 10^{-3}\mu\text{t}(502\pi t)$  και  $x_2 = 2 \cdot 10^{-3}\mu\text{t}(498\pi t)$  (S.I.)  
 Δ)  $x = 4 \cdot 10^{-3}\mu\text{t}(2\pi t)\mu\text{t}(500\pi t)$  (S.I.)

- 10.5.6. Επιπλέον διακροήματα  $f_g = \frac{N_g}{t} = \frac{8}{2}$  η  $f_g = 4\text{Hz}$   
 $|f_1 - f_2| = f_g \Rightarrow |680 - f_2| = 4$  αν'όπου  $f_2 = 676\text{Hz}$  (δευτή)  
 και  $f_2 = 684\text{Hz}$  (ονοφ.)

10.5.7  $x = 1062 \sin(4\pi t) + 1062 \sin(800\pi t)$  and  $A = 5 \text{ cm}$  and  $A = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} &= 4\pi \text{ and } \omega_1 - \omega_2 = 8\pi \\ \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} &= 800\pi \text{ and } \omega_1 + \omega_2 = 1600\pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega_1 = 804\pi \text{ rad/s, and } \omega_2 = 796\pi \text{ rad/s}$$

A. a)  $2\pi f_1 = 804\pi$  and  $f_1 = 402 \text{ Hz}$  and  $2\pi f_2 = 796\pi$  and  $f_2 = 398 \text{ Hz}$

b)  $x_1 = 5 \cdot 10^{-2} \sin(804\pi t) \text{ (cm)}$  and  $x_2 = 5 \cdot 10^{-2} \sin(796\pi t)$

B.  $\Delta f = |f_1 - f_2| = 4 \text{ Hz}$  and  $T_0 = 0,25 \text{ s}$

